

一类带交叉扩散项的食饵-捕食系统的正解的存在性*

侯秀梅

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 利用 Crandall - Rabinowitz 分歧理论, 研究了一类带有交叉扩散项的食饵 - 捕食系统的正解的存在性。

关键词: 交叉扩散; 食饵-捕食系统; 正解;

中图分类号: O175.25 文献标识码: A 文章编号: 0529-6579 (2008) 06-0008-04

考虑如下问题:

$$\begin{cases} \Delta[(1 + \alpha v)u] + u(a - u - cv) = 0, x \in \Omega \\ \Delta[(1 + \beta u)v] + v(b + du - v) = 0, x \in \Omega \\ u = v = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, u, v 分别表示食饵和捕食者在区域 Ω 里的密度, α, a, b, c, d 是正的常数, α, β 是交叉扩散系数。上述系统表示食饵和捕食者的人口密度的变化不仅依赖于自身的扩散强度还依赖于另外一种物种的人口密度的压力。问题 (1) 的详细生物背景可参看文 [1-2]。文 [3] 证明了当 α 充分小, β 足够大时正解的存在性。对于问题 (1) 的其它讨论也可参看文 [4-5]。当 $\alpha = 0, \beta = 0$ 时, 问题 (1) 就是著名的 Lotka-Volterra 食饵-捕食系统^[6-9]。本文主要考虑 $\beta = 0$ 情形的正解的存在性, 即考虑问题:

$$\begin{cases} \Delta[(1 + \alpha v)u] + u(a - u - cv) = 0, x \in \Omega \\ \Delta v + v(b + du - v) = 0, x \in \Omega \\ u = v = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

问题 (2) 的正解是相对于食饵-捕食系统的发展系统的稳态解的。如果有了问题 (2) 的正解的存在性, 就可以讨论相对应的发展系统的稳态解的稳定性。因此, 研究正解的存在性是必要的。问题 (2) 的正解是指在区域 Ω 内满足 $u > 0, v > 0$ 的 (2) 的解。

对于 $p > n$, 定义 $X = [W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)] \times [W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)]$, $\|u\|_p := (\int_{\Omega} |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $\|u\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |u(x)|$ 。为了方便, 记 $\|u\|$ 代替 $\|u\|_2$ 。

主要结果如下:

定理 1 假设 $a > \lambda_1, b > \lambda_1$, 则问题 (1) 的

正解的集合组成一个光滑曲线, 并可以用参数表示如下:

$$\Gamma = \{(u(x, s), v(x, s), b(s)) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) \times (\lambda_1, \infty); 0 < s < c\}$$

这里 $(u(x, 0), v(x, 0), b(0)) = (\theta_a, 0, b_*)$ 和 $(u(x, c), v(x, c), b(c)) = (0, \theta_b, b^*)$, 其中 b_* 和 b^* 定义见注 1, 引理 3 和引理 4。

1 一些引理

为了证明主要结果, 需要下列的引理:

引理 1^[10] 设 $a > \lambda_1$, 如果成立:

$$\lambda_1\left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}\right) < 0 \text{ 和 } \lambda_1(-b - d\theta_a) < 0$$

或者 $\lambda_1\left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}\right) > 0$ 和 $\lambda_1(-b - d\theta_a) > 0$,

则问题 (2) 存在正解。这里若 $b \leq \lambda_1$, 则 $\theta_b = 0$ 。

引理 2^[11] 如果 $a > \lambda_1$, 则问题

$$\begin{cases} \Delta u + u(a - u) = 0, x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

存在唯一的正解 θ_a , 并且 $a \rightarrow \theta_a$ 是单调递增算子。

注 1 设 $q(x)$ 是连续函数, 记 $\lambda_1(q)$ 是下列问题:

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u, x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

的最小的特征值, 则 $\lambda_1(q)$ 是单的, 且 $q \rightarrow \lambda_1(q)$ 是单调递增算子。为了方便, 记 $\lambda_1(0)$ 为 λ_1 。

显然 $(0, 0)$ 是问题 (2) 的平凡解。由引理 2 知, 如果 $a > \lambda_1$, 问题 (2) 存在半平凡解 $(\theta_a, 0)$ 。如果 $b > \lambda_1$, 问题 (2) 存在半平凡解 $(0, \theta_b)$ 。

* 收稿日期: 2008-05-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771223)

作者简介: 侯秀梅 (1979 年生), 女, 博士生; E-mail: hxmj12@tom.com

引理3 设 $a > \lambda_1$, 则存在唯一的 $b = b^* \in (\lambda_1, \infty)$ 满足 $\lambda_1\left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}\right) = 0$ 。

证明 令 $S(a, b) = \lambda_1\left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}\right)$, 则

$$S(a, \lambda_1) = \lambda_1(-a) = \lambda_1 - a < 0$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} S(a, b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \lambda_1\left(\frac{c}{\alpha}\right) = \lambda_1 + \frac{c}{\alpha} > 0$$

又因为 $b \rightarrow \theta_b$ 是单调递增的, $\frac{\partial \theta_b}{\partial b} > 0$, 于是

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}\right) = \frac{(c + \alpha a) \frac{\partial \theta_b}{\partial b}}{(1 + \alpha\theta_b)^2} > 0$$

由于 $q \rightarrow \lambda_1(q)$ 是单调递增算子, 可以得到 $S(a, b)$ 关于 b 是单调递增的。于是存在唯一的 $b = b^* \in (\lambda_1, \infty)$ 使得 $\lambda_1\left(\frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}\right) = 0$ 成立。

类似地, 可以证明下列引理:

引理4 设 $b > \lambda_1$, 则存在唯一的 $a = a_* \in (\lambda_1, \infty)$ 满足 $\lambda_1(b + d\theta_a) = 0$ 。

引理5^[11] 设 (U, V) 是问题 (2) 的正解, 则对于所有的 $x \in \Omega$, 有

$$0 \leq u(x) \leq U(x) \leq M(a) = \begin{cases} a & \text{如果 } \alpha a \leq c \\ \frac{(c + \alpha a)^2}{4\alpha a} & \text{如果 } \alpha a \geq c \end{cases}$$

且 $0 \leq v(x) \leq V(x) \leq b + dM(a)$ 。

下面设 φ_* 和 φ^* 分别是下列问题的正解:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_* + (-b_* - d\theta_a)^* = 0, x \in \Omega \\ \varphi_* = 0, x \in \partial\Omega, \|\varphi_*\| = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} -\Delta \varphi^* + \frac{c\theta_{b^*} - a^*}{1 + \alpha\theta_{b^*}} = 0, x \in \Omega \\ \varphi^* = 0, x \in \partial\Omega, \|\varphi^*\| = 1 \end{cases} \quad (6)$$

显然, φ_* 和 φ^* 被上述特征问题唯一确定。

令 $U = (1 + \alpha v)u$, $V = v$ (7)

则问题 (2) 等价与下列问题:

$$\begin{cases} \Delta U + f(u, v) = 0, x \in \Omega \\ \Delta V + f(u, v) = 0, x \in \Omega \\ U = V = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

其中 u, v 是 U, V 的函数, $f(u, v) = u(a - u - cv)$ 和 $g(u, v) = v(b + du - v)$ 。则由 (7) 可以得到问题 (8) 的半平凡解为 $(\theta_a, 0, b)$ 和 $(0, \theta_b, b)$ 。

引理6 (a) 设 $a > \lambda_1$, 问题 (8) 的正解从半平凡解曲线 $\{(\theta_a, 0, b), a > \lambda_1\}$ 分歧出来当且仅当 $b = b_*$ 。即存在某个光滑函数 ψ , 在 $(\theta_a, 0, b_*) \in X \times \mathbb{R}$ 附近的正解能够表示成下列形式:

$$\{(\theta_a + s\psi + s\hat{u}, s\varphi_* + s\hat{v}(s), b(s)) : 0 < s < \delta\}$$

其中 $\hat{u}(s), \hat{v}(s)$ 是关于 s 的光滑函数, 并且满足 $(\hat{u}(0), \hat{v}(0), b(0)) = (\theta_a, 0, b_*)$ 。

(b) 问题 (8) 的正解从半平凡解曲线 $\{(0, \theta_b, b), b > \lambda_1\}$ 分歧出来当且仅当 $b = b^*$, 即存在某个光滑函数 χ , 在 $(\theta_a, 0, b_*) \in X \times \mathbb{R}$ 附近的正解能够表示成下列形式:

$$\{(s\varphi^* + s\bar{u}(s), \theta_{b^*} + s\chi(s) + s\bar{v}(s), b(s)) : 0 < s < \delta\}$$

其中 $\bar{u}(s), \bar{v}(s)$ 是关于 s 的光滑函数, 并且满足 $(\bar{u}(0), \bar{v}(0), b(0)) = (0, \theta_{b^*}, b^*)$ 。

证明 通过在 (U^*, V^*) 处的泰勒展开, 问题 (8) 可以变成下列问题:

$$\begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u^*, v^*) \\ g(u^*, v^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_u^* & f_v^* \\ g_u^* & g_v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_U^* & u_V^* \\ v_U^* & v_V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U - U^* \\ V - V^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho^1(U - U^*, V - V^*) \\ \rho^2(U - U^*, V - V^*) \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

其中 $\rho^i(0, 0) = \rho_{(U, V)}^i(0, 0)$, $i = 1, 2$ 。 $f_u^* = f_u(u(U^*, V^*), v(U^*, V^*))$, $u_V^* = u_v(U^*, V^*)$ 和其他的符号类似的定义。

对 (7) 两边关于 U, V 分别微分, 可以得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha v & \alpha u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_U & u_V \\ v_U & v_V \end{pmatrix}$$

$$\text{于是有} \begin{pmatrix} u_U & u_V \\ v_U & v_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \alpha V} & \frac{-\alpha U}{(1 + \alpha V)^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

选择 $(U^*, V^*) = (\theta_a, 0)$, $\bar{U} = U - \theta_a$, 于是方程 (9) 变成下列问题:

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{U} \\ \Delta V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a - 2\theta_a & -\alpha(a - 2\theta_a)\theta_a - c\theta_a \\ 0 & b + d\theta_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho^1(\bar{U}, V) \\ \rho^2(\bar{U}, V) \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

令 $F(\bar{U}, V, b) =$

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{U} + (a - 2\theta_a)\bar{U} - [\alpha(a - 2\theta_a) + c]\theta_a V + \rho^1(\bar{U}, V) \\ \Delta V + (b + d\theta_a)V + \rho^2(\bar{U}, V) \end{pmatrix} \quad (11)$$

显然有 $F(0, 0, b) = 0$ 。对 $F(\bar{U}, V, b)$ 关于 $(\bar{U}, V)$ 在 $(0, 0, b)$ 处求 Frechet 导数, 由 $\rho^i(0, 0) = \rho_{(U, V)}^i(0, 0)$, $i = 1, 2$ 。可以得到

$$F_{(\bar{U}, V)}(0, 0, b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Delta h + (a - 2\theta_a)h - [\alpha(a - 2\theta_a) + c]\theta_a k \\ \Delta k + (b + d\theta_a)k \end{pmatrix} \quad (12)$$

从 (5) 式可知, 存在唯一的 b_* 和 φ_* 满足

$$-\Delta \varphi_* + (-b_* - d\theta_a) = 0, x \in \Omega,$$

$$\varphi_* = 0, x \in \partial\Omega, \|\varphi_*\| = 1$$

令 $\psi = -(-\Delta - a + 2\theta_a)^{-1}[(\alpha a + c - 2\alpha\theta_a)\theta_a\varphi_*]$,
则 $\ker F_{(\bar{U}, \bar{V})}(0, 0, b) = \text{span}\{(\psi, \varphi_*)\}$ 。

给定 $(\bar{h}, \bar{k}) \in \text{Range } F_{(\bar{U}, \bar{V})}(0, 0, b_*)$, 则存在 $(h, k) \in X$ 满足

$$\begin{cases} \Delta h + (a - 2\theta_a)h - [\alpha(a - 2\theta_a) + c]\theta_a k = \bar{h}, x \in \Omega \\ \Delta k + (b_* + d\theta_a)k = \bar{k}, x \in \Omega \\ h = k = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

问题 (13) 的第二个问题有解 k 当且仅当 $\int_{\Omega} \bar{k}\varphi_* dx = 0$ 。代入问题 (13) 的第一个方程, 由于算子 $-\Delta - a + 2\theta_a$ 的可逆性^[6], 可得第一个问题也是可解的。因此,

$$\text{codimRange } F_{(\bar{U}, \bar{V})}(0, 0, b_*) = 1$$

$$F_{(\bar{U}, \bar{V}), b}(0, 0, b_*) \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_* \end{pmatrix} \int_{\Omega} \|\varphi_*\|^2 dx = 1$$

所以,

$$F_{(\bar{U}, \bar{V}), b}(0, 0, b_*) \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi_* \end{pmatrix} \notin \text{Range } F_{(\bar{U}, \bar{V}), b}(0, 0, b_*)$$

应用 Crandall-Rabinowitz 分歧定理^[12], $b = b_*$ 是问题 (8) 的分歧点。利用 Krein-Rutumn 定理^[13], 特征问题 $\Delta k + (b + d\theta_a)k = 0$ 没有其它的特征值对应于正的特征函数除了 $\lambda = b_* + d\theta_a$ 。也就是说如果 $b \neq b_*$, 则 $\ker F_{(\bar{U}, \bar{V})}(0, 0, b) = \{0\}$ 。于是对于任何 $b \neq b_*$ 都不可能是分歧点。

设 $b > \lambda_1$, $(U^*, V^*) = (0, \theta_b)$ 和 $V = \bar{V}$, 则方程 (9) 变成下列问题:

$$\begin{pmatrix} \Delta U + \frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}U + \rho^1(U, \bar{V}) \\ \Delta \bar{V} + \frac{d\theta_b}{1 + \alpha\theta_b}U + (d - 2c\theta_b)\bar{V} + \rho^2(U, \bar{V}) \end{pmatrix} = 0 \quad (14)$$

记 $G(U, \bar{V}, b) =$

$$\begin{pmatrix} \Delta U + \frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}U + \rho^1(U, \bar{V}) \\ \Delta \bar{V} + \frac{d\theta_b}{1 + \alpha\theta_b}U + (d - 2c\theta_b)\bar{V} + \rho^2(U, \bar{V}) \end{pmatrix}$$

则 $G(0, 0, b) = 0$ 且

$$G_{(\bar{U}, \bar{V})}(0, 0, b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Delta h + \frac{c\theta_b - a}{1 + \alpha\theta_b}h \\ \Delta k + \frac{d\theta_b}{1 + \alpha\theta_b}h + (d - 2c\theta_b)k \end{pmatrix}$$

类似的证明, 可以得到

$$\ker G_{(\bar{U}, \bar{V})}(0, 0, b^*) = \text{span}\{(\varphi^*, \chi^*)\}$$

$$\text{其中 } \chi = -(-\Delta - d + 2c\theta_{b^*})^{-1} \frac{d\theta_{b^*}}{1 + \alpha\theta_{b^*}} \varphi^*$$

$$\text{codim } G(U, \bar{V}, b^*) = 1$$

$$G(0, 0, b^*) \begin{pmatrix} \varphi^* \\ \chi \end{pmatrix} \notin \text{Range } G_{(\bar{U}, \bar{V})}(0, 0, b^*)$$

由上述结论, 运用 Crandall-Rabinowitz 局部分歧定理和 Krein-Rutumn 定理, 可以得到问题 (8) 产生分歧当且仅当 $b = b^*$ 。证毕。

2 主要结果的证明

现在来完成定理 1 的证明:

证明 从引理 6 (a) 可知 $a > \lambda_1$, 问题 (8) 的正解从半平凡解曲线 $\{(\theta_a, 0, b), a > \lambda_1\}$ 分歧出来当且仅当 $b = b_*$ 。由 (7) 式变换的正则性, 问题 (2) 的正解从半平凡解曲线 $\{(\theta_a, 0, b), a > \lambda_1\}$ 分歧出来当且仅当 $b = b_*$, 设 $\hat{\Gamma}$ 是从 $(\theta_a, 0, b_*)$ 分歧出来的正解曲线的极大延拓, 根据分歧理论的全局延拓定理^[14], $\hat{\Gamma}$ 必须满足下列条件之一:

① $\hat{\Gamma}$ 在 $X \times \mathbb{R}$ 中是无界的;

② $\hat{\Gamma}$ 相交与另外一个半平凡解 $(\theta_a, 0, b^*)$ 或者平凡解。

由引理 5 可知 $\hat{\Gamma}$ 必须是有界的, 因此 ① 不成立。从而 ② 必须成立。于是, 从引理 6 (a) 可知, $\hat{\Gamma}$ 只能相交于 $(\theta_a, 0, b)$ 或者 $(0, 0)$ 。

定义 $P = \{(u, v) \in X, u > 0, v > 0\}$, 存在 $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{\Gamma}$, 使得 $(\hat{u}, \hat{v}) \in \partial P$, 由极大值原理可知 $\hat{u} \equiv 0$ 或者 $\hat{v} \equiv 0$ 。易证平凡解 $(0, 0)$ 是非退化的, 也就是 $(0, 0)$ 不是分歧点, 所以 $\hat{\Gamma}$ 只能相交于 $(\theta_a, 0, b)$, 从引理 6 (b) 可知, $\hat{\Gamma}$ 只能相交于 $(\theta_a, 0, b^*)$ 。当 $p > n$ 时, $W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\Omega)$, 由此完成了定理 1 的证明。

参考文献:

- [1] OKUBO A, LEVIN L A. Diffusion and ecological problems: modern perspective, Interdisciplinary Applied Mathematics [M]. 2nd Edition. New York: Springer, 1992.
- [2] SHIGESADA N, KAWASAKI K, TERAMOTO E. Spatial segregation of interacting species[J]. J Theoret Biol, 1979, 79: 83-99.
- [3] KUTO K, YAMADA Y. Multiple coexistence states for a prey-predator system with cross-diffusion[J]. J Differential Equations, 2004, 197: 315-348.
- [4] DUBEY B, DAS B, HASSAIN J. A predator-prey interaction model with self and cross-diffusion[J]. Ecol Mod-

- elling, 2002, 141: 67 – 76.
- [5] RYU K, AHN I. Positive steady-states for two interacting species models with linear self-cross diffusions[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2003, 9:1049 – 1061.
- [6] DANCER E N. On positive solutions of some pairs of differential[J]. Trans Amer Math Soc, 1984, 284: 729 – 743.
- [7] DANCER E N. On uniqueness and stability for solutions of singularly perturbed predator-prey type equations with diffusion[J]. J Differential Equations, 1993, 102: 1 – 32.
- [8] DANCER E N. On positive solutions of some pairs of differential equations II[J]. J Differential Equations, 1985, 60: 236 – 258.
- [9] LI L. On positive solutions of a nonlinear equilibrium boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1989, 138:537 – 549.
- [10] NAKASHIMA K, YAMADA Y. Positive steady states for prey-predator models with cross-diffusion[J]. Adv Differential Equations, 1996, 6: 1099 – 1122.
- [11] BLAT J, BROWN K J. Bifurcation of steady-state solutions in predator-prey and competition systems[J]. Pro Royal Soc Edingburg, 1984, 97(A): 21 – 34.
- [12] CRANDALL M G, RABINOWITZ P H. Bifurcation from simple eigenvalues[J]. J Funct Anal, 1971, 8: 321 – 340.
- [13] SMOLLER J. Shock waves and Reaction-diffusion Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [14] RABINOWITZ P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problem[J]. J Funct Anal, 1971, 7: 487 – 513.

The Existence of Non-constant Positive Solution of A Prey-predator System with Cross-diffusion

HOU Xiu-mei

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: By Crandall-Rabinowitz local bifurcation theorem and global bifurcation theory, the existence of positive solution to the prey-predator system with cross-diffusion was obtained.

Key words: prey-predator; cross-diffusion; positive solution